

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА 2.2

1. Найти среднее значение функции в указанном промежутке.

1. $f(x) = \sin^4 x, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right].$
2. $f(x) = \cos^2 x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$
3. $f(x) = x \sin 2x, x \in [-\pi; 0].$
4. $f(x) = 10 + 2 \sin x, x \in [0; 2\pi].$
5. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in [1; 4].$
6. $f(x) = \ln 3x, x \in \left[1; \frac{e}{3}\right].$
7. $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}, x \in [0; 1].$
8. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}, x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right].$
9. $f(x) = x^3 e^{-x^4/4}, x \in [0; 2].$
10. $f(x) = x^3 - x, x \in [0; 1].$
11. $f(x) = \cos^3 x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$
12. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}, x \in [0; 1].$
13. $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2}{x^5}, x \in [2; 3].$
14. $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$
15. $f(x) = x e^{-x^2/2}, x \in [2; 4].$
16. $f(x) = x + \sqrt[4]{(x-1)^3}, x \in [1; 2].$
17. $f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right].$
18. $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}, x \in [1; 1.5].$
19. $f(x) = \operatorname{ctg} x, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right].$
20. $f(x) = \frac{1}{(1+5x)^3}, x \in [-2; -1].$
21. $f(x) = \sqrt[3]{x}, x \in [0; 1].$
22. $f(x) = x^3(x+2)^2, x \in [0; 1].$
23. $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in [1; 4].$
24. $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}, x \in [e; e^3].$
25. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, x \in [0; 1].$
26. $f(x) = \sin x \cos^2 x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

$$27. f(x) = \cos^4 x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]. \quad 28. f(x) = \sin 2x \cos 3x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

$$29. f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2}, \quad x \in \left[\frac{1}{\pi}; \frac{2}{\pi}\right]. \quad 30. f(x) = \sin^2 x \cos x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right].$$

2. Найти точки экстремума и точки перегиба функции.

$$1. \Phi(x) = \int_0^x (t-1)(t+1)^2 dt. \quad 2. \Phi(x) = \int_{-1}^x t\sqrt{1-t^2} dt.$$

$$3. \Phi(x) = \int_{-2}^x 2t(t^2-3) dt. \quad 4. \Phi(x) = \int_0^x (t^3-3t^2) dt.$$

$$5. \Phi(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt. \quad 6. \Phi(x) = \int_0^x \frac{1-t^2}{1+t^2} dt.$$

$$7. \Phi(x) = \int_1^x \left(8t - \frac{1}{t^2}\right) dt. \quad 8. \Phi(x) = \int_{e^{-1}}^x \frac{1-\ln t}{t} dt.$$

$$9. \Phi(x) = \int_0^x t e^{-t^2/2} dt. \quad 10. \Phi(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt.$$

$$11. \Phi(x) = \int_0^x (t-5)(t-4) dt. \quad 12. \Phi(x) = \int_0^x (t^3+6t^2+9t) dt.$$

$$13. \Phi(x) = \int_0^x (t + 5)(t-2)^2 dt. \quad 14. \Phi(x) = \int_{0,5}^x \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right) dt.$$

$$15. \Phi(x) = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt. \quad 16. \Phi(x) = \int_0^x (t+1)(t+4)^2 dt.$$

$$17. \Phi(x) = \int_{-1}^x t^3(t+2)dt.$$

$$18. \Phi(x) = \int_0^x \left(\frac{t^3}{3} + t^2\right)dt.$$

$$19. \Phi(x) = \int_{e^{-1}}^x \frac{e \ln t}{t} dt.$$

$$20. \Phi(x) = \int_0^x (t-2)(t-1)^2 dt.$$

$$21. \Phi(x) = \int_0^x (4t - t^2)dt.$$

$$22. \Phi(x) = \int_0^x (t^2 - 4t - 5)dt.$$

$$23. \Phi(x) = \int_0^x (t^2 - 2t - 3)dt.$$

$$24. \Phi(x) = \int_0^x (t-2)(t-3)^2 dt.$$

$$25. \Phi(x) = \int_0^x (t + 1)(t-1)^2 dt.$$

$$26. \Phi(x) = \int_0^x (t-2)(t+1)^2 dt.$$

$$27. \Phi(x) = \int_0^x (t + 2)(t-1)^2 dt.$$

$$28. \Phi(x) = \int_0^x (t-3)(t+2)dt.$$

$$29. \Phi(x) = \int_0^x (t-2)^2(t + 3)dt.$$

$$30. \Phi(x) = \int_0^x (t-4)(t+3)^2 dt.$$

3. Нарисовать область, ограниченную линиями, и вычислить ее площадь.

$$1. y = 4 - x^2, y = 0,5x + 1.$$

$$2. y^2 = x + 2, y = x.$$

$$3. y = x^2 - 2x - 3, y = -x^2 - 2x + 5.$$

$$4. y^2 = 2x + 4, y = x + 2.$$

$$5. y = x^2 - 2x - 6, y = -3x^2 + 2x + 2.$$

$$6. y = x^2, x + y = 2.$$

$$7. y = 12 + 2x - 3x^2, y = -7x.$$

$$8. xy = 4, y = 4, x = 2.$$

9. $y = x^2 + x - 5$, $y = -2x^2 - 2x + 1$. 10. $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$.
 11. $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$. 12. $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$.
 13. $y = -x^2 + 3x + 3$, $y = x$. 14. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.
 15. $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 6 - 4x$. 16. $y = x^2 + 1$, $x + y = 3$.
 17. $y = x^2 - 6$, $y = -x^2 + 5x - 6$. 18. $y = x$, $y = 2 - x^2$.
 19. $y = x^2 + 2x + 3$, $y = 2x + 4$. 20. $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$.
 21. $y = x^2 + 8x - 12$, $y = 18x - x^2$. 22. $y = 3 + 2x - x^2$, $y = 4x$.
 23. $y = x^2 + 2x + 1$, $y = 5 - x$. 24. $y = 3 - x - x^2$, $y = -3x$.
 25. $y = 4x^2 - 5x + 2$, $y = 3x^2 + x - 6$. 26. $y = 6 + x - 3x^2$, $y = -2x$.
 27. $y = 15 + 2x - 5x^2$, $y = -8x$. 28. $y = -1 + x - 3x^2$, $y = 5x$.
 29. $y = 15 + 2x - 3x^2$, $y = -10x$. 30. $y^2 = 2x + 1$, $x - y = 1$.

4. Нарисовать область, ограниченную линиями, и вычислить ее площадь.

1. $r = 3 + \sin 2\varphi$. 2. $r^2 = 4 \cos 2\varphi$. 3. $r = 2(1 - \cos \varphi)$.
 4. $r = 2 \sin 3\varphi$. 5. $r = 3 \cos 2\varphi$. 6. $r = 2 + \cos 4\varphi$.
 7. $r = 3 \sin 2\varphi$. 8. $r = 2 - \cos 3\varphi$. 9. $r = 3(1 + \sin \varphi)$.
 10. $r^2 = 4 \sin 2\varphi$. 11. $r = 2 \sin \varphi - 1$. 12. $r^2 = 4 \sin 4\varphi$.
 13. $r = 2 \sin 5\varphi$. 14. $r = 3 \cos 3\varphi$. 15. $r = 2 - \cos \varphi$, $r = \cos \varphi$.
 16. $r = \cos^2 \varphi$. 17. $r = 2(1 - \sin \varphi)$. 18. $r = 2(2 + \cos \varphi)$.

$$19. r = 2 \cos 5\varphi. \quad 20. r = 1 + \cos \varphi. \quad 21. r = \cos \varphi, \quad r = 2 \cos \varphi.$$

$$22. r = 2 \sin^2 \varphi. \quad 23. r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi. \quad 24. r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi.$$

$$25. r = 2 \cos \varphi. \quad 26. r = 2(2 + \sin \varphi). \quad 27. r = \frac{2}{\varphi}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$28. r = 2 \sin \varphi. \quad 29. r = 1 + 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad 30. r = 1 + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной заданными линиями. В задачах 1 – 15 ось вращения Ox , в задачах 16 – 30 ось вращения Oy .

$$1. y = -2x^2 + 8x, \quad y = 0.$$

$$2. y = \cos x, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

$$3. y = 2x^2, \quad y = 2|x|.$$

$$4. y = e^{-x} - 1, \quad y = 1, \quad x = 0.$$

$$5. y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

$$6. y = \sin^2 x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$7. xy = 4, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0.$$

$$8. y = -x^2 + 2x, \quad y = 0.$$

$$9. y = x^2 - 3x, \quad y = 2x, \quad y \geq 0.$$

$$10. y = x^2 - x, \quad y = 0.$$

$$11. y = x^2, \quad 2x + y - 3 = 0, \quad x \geq 0.$$

$$12. y = (x - 1)^2, \quad y = 1.$$

$$13. y = 2 \left(\frac{x}{3} \right)^{2/3}, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

$$14. \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1, \quad y = \pm 2.$$

$$15. y^2 = 4 - x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$16. y^2 = (x + 4)^3, \quad x = 0.$$

$$17. y = \arcsin x, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

$$18. (y - 1)^2 = x, \quad x = 0, \quad y = 2.$$

$$19. 2x = 3y - y^2, \quad x = 0, \quad y = 2x.$$

$$20. y = x^2, \quad 8x = y^2.$$

$$21. 3x = 2y - y^2, \quad x = 0, \quad y = 3x.$$

$$22. y = x^2, \quad y = 4, \quad x \geq 0.$$

$$23. y = 2\operatorname{ch} \frac{x}{2}, \quad x = \pm 2, \quad y = 0. \qquad 24. y = \frac{x}{4-x}, \quad x = 2, \quad y = 0.$$

$$25. y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}, \quad y = 0.$$

$$26. y = x^2 - 2x + 2, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

$$27. y = x^2 + 4x + 5, \quad y = 0, \quad -2 \leq x \leq 0.$$

$$28. y = x^2 + 2x + 3, \quad y = 0, \quad -1 \leq x \leq 0.$$

$$29. y = \ln(2x + 3), \quad y = 2\ln x, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

$$30. y = \ln(x + 2), \quad y = 2\ln x, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

6. Нарисовать дугу кривой и вычислить ее длину.

1. $y^2 = x^3, \quad x \leq \frac{4}{3}.$	2. $y = \ln(3 \sin x), \quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
3. $y = x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 4.$	4. $y = \ln x, \quad 1 \leq x \leq \sqrt{3}.$
5. $y = \ln(2 \cos x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$	6. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2.$
7. $y = \ln(x^2 - 1), \quad 2 \leq x \leq 3.$	8. $9y^2 = x(x - 3)^2, \quad x \leq 3.$
9. $y^2 = \frac{4}{9}(2 - x)^3, \quad 0 \leq x \leq 2.$	10. $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 3.$
11. $y = \ln \frac{5}{2x}, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$	12. $y = \frac{x^2 - 2}{3}, \quad 0 \leq x \leq 2.$
13. $y^2 = 16x, \quad 0 \leq x \leq 81.$	14. $y^3 = x^2, \quad 0 \leq y \leq 4/3.$
15. $y = 4 - x^2, \quad y \geq 0.$	16. $y = 2 - e^x, \quad \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}.$

17. $y = \ln \frac{1}{x}, \quad \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{4}{3}.$	18. $y = -\ln(\cos x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$
19. $y = \frac{x^2}{4} - 1, \quad y \leq 0.$	20. $y = \ln(5 \cos x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$
21. $y = 4 \operatorname{ch} \frac{x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 1.$	22. $y = \ln(2 \sin x), \quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}.$
23. $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x, \quad 0 \leq x \leq 3.$	24. $y = \ln \sin x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}.$
25. $y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$	26. $y = 2 \ln(4 - x^2), \quad y \geq 0.$
27. $y^2 = 5(x - 1)^3, \quad 1 \leq x \leq 2.$	28. $y^2 = 2,5(x - 2)^3, \quad 2 \leq x \leq 4.$
29. $y = 2 \operatorname{ch} \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$	30. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y, \quad 1 \leq y \leq e.$

7. Нарисовать дугу кривой и вычислить ее длину.

1. $x = t^2, \quad y = t^3 + 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$

2. $x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

3. $x = \frac{t^6}{6}, \quad y = 2 - \frac{t^4}{4}, \quad 0 \leq t \leq 2.$

4. $x = t^3 + 1, \quad y = t^2 - 1, \quad y \leq 0.$

5. $x = \sqrt{3}t^2, \quad y = t - t^3, \quad -1 \leq t \leq 1.$

6. $x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \quad y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}.$

7. $x = 1 - e^t, \quad y = 1 + e^t, \quad 0 \leq t \leq 1.$

8. $x = \sin^3 t, \quad y = \cos^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

9. $x = t^6, y = 1 - t^4, 0 \leq t \leq 1.$

10. $x = \frac{t^3}{3}, y = 1 - \frac{t^2}{4}, y \geq 0.$

11. $x = \frac{t^2}{2} - 1, y = \frac{t^2}{2}, 0 \leq t \leq 1.$

12. $x = t^2, y = t^3 - 1, 0 \leq t \leq 1.$

13. $x = t, y = t^2 - 1, -1 \leq t \leq 1.$

14. $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi.$

15. $x = e^{2t} \cos t, y = e^{2t} \sin t, 0 \leq t \leq 1.$

16. $x = 3 \cos t - \cos 3t, y = 3 \sin t - \sin 3t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

17. $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

18. $x = \frac{t^3}{3} - t, y = t^2 + 1, 0 \leq t \leq \sqrt{3}.$

19. $x = t^4 - 4, y = 8 - t^6, 0 \leq t \leq \sqrt{2}.$

20. $x = t^2 + 1, y = 1 - t^3, 0 \leq t \leq 2.$

21. $x = t^2, y = \frac{t^3}{3}, -1 \leq t \leq 1.$

22. $x = e^t(\cos t + \sin t), y = e^t(\cos t - \sin t), \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$

23. $x = t^2, y = \frac{t(t^2 - 3)}{3}.$

24. $x = 2(3 \cos t - \cos 3t), y = 2(3 \sin t - \sin 3t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

25. $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, 0 \leq t \leq 1.$

$$26. x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, 0 \leq t \leq \pi.$$

$$27. x = 2(t^2 + 1), y = 2 - \frac{2(t^3 - 3t)}{3}.$$

$$28. x = \frac{t^6}{6}, y = 2 - \frac{t^4}{4}, 0 \leq t \leq \sqrt[4]{8}.$$

$$29. x = \frac{\sin t}{\sqrt{8}}, y = \frac{\sin t \cos t}{8}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$30. x = 2 - \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^6}{6}, 0 \leq t \leq \sqrt[4]{8}.$$

8. Нарисовать дугу кривой и вычислить ее длину.

$$1. r = 1 + \cos \varphi.$$

$$2. r = 3(1 - \cos \varphi).$$

$$3. r = 2(1 - \sin \varphi).$$

$$4. r = \sin \varphi - \cos \varphi.$$

$$5. r = 2(1 + \sin \varphi).$$

$$6. r = 2e^{4/3\varphi}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$7. r = 2(1 + \cos \varphi).$$

$$8. r = 3\varphi^2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$9. r = 5\varphi^2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$10. r = 2 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{12}.$$

$$11. r = \sqrt{2}e^\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$12. r = 5e^{5/12\varphi}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$13. r = 2\sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right).$$

$$14. r = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right), 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$15. r = \frac{1}{\varphi}, \frac{3}{4} \leq \varphi \leq \frac{4}{3}.$$

$$16. r = 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right), 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

17. $\varphi = \sqrt{r}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. 18. $r = \frac{1}{1 + \cos \varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.
19. $r = 3\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}$. 20. $r = \cos^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.
21. $r = \cos^4\left(\frac{\varphi}{4}\right)$. 22. $r = 4\cos^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.
23. $r = \sqrt{2} \sin \varphi$. 24. $r = 3\sin^4\left(\frac{\varphi}{4}\right)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
25. $r = \sin \varphi + \cos \varphi$. 26. $r = 3e^{3/4\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.
27. $r = 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}$. 28. $r = 3(1 + \sin \varphi)$, $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq 0$.
29. $r = \sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)$. 30. $r = a \cos^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)$, $a > 0$.

9*. Применение определенного интеграла.

I. С помощью подъемного крана извлекают железобетонную деталь со дна реки глубиной h м. Какая работа при этом совершается, если деталь имеет форму правильного тетраэдра с ребром a м? Плотность железобетона 2500 кг/м^3 , плотность воды 1000 кг/м^3 .

1. $h = 5$; $a = 1$. 2. $h = 6$; $a = 2$. 3. $h = 5$; $a = 2$.

4. $h = 7$; $a = 1,5$. 5. $h = 6$; $a = 1,2$. 6. $h = 7$; $a = 1$.

II. Найти силу давления на пластинку, имеющую форму равнобокой трапеции, верхнее основание которой a м, нижнее – b м, а высота – h м, погруженную вертикально в воду на глубину c м. Плотность воды 1000 кг/м^3 .

7. $a = 0,1$; $b = 0,2$; $c = 0,3$; $h = 0,5$.

8. $a = 0,1$; $b = 0,3$; $c = 0,3$; $h = 0,4$.

9. $a = 0,2$; $b = 0,4$; $c = 0,1$; $h = 0,5$.

10. $a = 0,3$; $b = 0,6$; $c = 0,2$; $h = 0,3$.

11. $a = 0,2$; $b = 0,5$; $c = 0,1$; $h = 0,2$.

12. $a = 0,3$; $b = 0,4$; $c = 0,2$; $h = 0,4$.

III. Найти работу, совершаемую при выкачивании воды из ко-
рыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a м, радиус –
 r м. Плотность воды 1000 кг/м^3 .

13. $a = 1$; $r = 0,3$. 14. $a = 1,2$; $r = 0,4$. 15. $a = 1,5$; $r = 0,4$.

16. $a = 1,1$; $r = 0,3$. 17. $a = 1,4$; $r = 0,5$. 18. $a = 1,3$; $r = 0,5$.

IV. Труба имеет диаметр d см. Один конец ее соединен с баком,
в котором уровень воды на a м выше верхнего края трубы, а другой
закрыт заслонкой. Найти силу давления на заслонку. Плотность воды
 1000 кг/м^3 .

19. $d = 6$; $a = 1$. 20. $d = 8$; $a = 1,2$. 21. $d = 10$; $a = 1,4$.

22. $d = 12$; $a = 1,6$. 23. $d = 14$; $a = 1,8$. 24. $d = 16$; $a = 2$.

V. Какую силу давления испытывает прямоугольная пластинка
длиной a см и шириной b см, если она наклонена к горизонтальной
поверхности воды под углом α и ее большая сторона находится на
глубине h см? Плотность воды 1000 кг/м^3 .

25. $a = 10$; $b = 8$; $\alpha = 30^\circ$; $h = 30$.

26. $a = 15$; $b = 10$; $\alpha = 30^\circ$; $h = 30$.

27. $a = 16$; $b = 12$; $\alpha = 45^\circ$; $h = 10$.

28. $a = 18$; $b = 15$; $\alpha = 45^\circ$; $h = 20$.

29. $a = 20$; $b = 18$; $\alpha = 60^\circ$; $h = 30$.

30. $a = 14$; $b = 10$; $\alpha = 60^\circ$; $h = 15$.

10. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$1. \int_0^{+\infty} e^{-4x} dx.$$

$$2. \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$3. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

$$4. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}.$$

$$5. \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

$$6. \int_1^e \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}.$$

$$7. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}.$$

$$8. \int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - 3)^3}}.$$

$$9. \int_0^1 \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[5]{x^3}} dx.$$

$$10. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}.$$

$$11. \int_0^{2/\pi} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$$

$$12. \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2} \cos \frac{\pi}{1-x}.$$

$$13. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$$

$$14. \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

$$15. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}.$$

$$16. \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

$$17. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + x^3}.$$

$$18. \int_1^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx.$$

$$19. \int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

$$20. \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$21. \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$22. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$23. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$24. \int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^2 - 4}}.$$

$$25. \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx.$$

$$26. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^3)^2}.$$

$$27. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$28. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

$$29. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(4x^2 + 1)^3}}.$$

$$30. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}.$$

11. Найти и изобразить в плоскости Oxy область определения функции.

$$1. z = \sqrt{e^{xy}(x - y^2)}.$$

$$3. z = \frac{x}{y} - \ln((x + 2)(1 - y)).$$

$$5. z = \frac{2x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$$

$$7. z = \frac{1}{x} + \ln(4x - y^2 + 8).$$

$$9. z = \frac{1}{x - y} + \frac{\ln y}{\sqrt{2x + 3y}}$$

$$11. z = \frac{3 - \sqrt{xy}}{y - x^3}.$$

$$13. z = \frac{\ln x + \sqrt{y}}{y - x^2}.$$

$$15. z = 2 - \arccos(1 - x - y).$$

$$17. z = \sqrt{y - x^2} + \frac{xy}{y - 2}.$$

$$19. z = \sqrt{(x + y)(y - 2)}.$$

$$21. z = \frac{xy}{\sqrt{x - \sqrt{y}}}$$

$$23. z = \frac{\ln((x - 1)(y + 2))}{x - y}.$$

$$2. z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + 2 \ln(9 - x^2 - 9y^2).$$

$$4. z = \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9}}$$

$$6. z = \sqrt{(x - y)(y + 2x - 4)}.$$

$$8. z = \frac{2x - y}{\ln(1 - x^2 + y)}.$$

$$10. z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} + \frac{x - 1}{x^2 + y^2 - 4},$$

$$12. z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} + \ln\left(1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}\right).$$

$$14. z = \sqrt{3y} + \frac{x}{\sqrt{1 - x - y}}$$

$$16. z = \sqrt{x^2 - y^2 - 1} - \ln(9 - x^2 - y^2).$$

$$18. z = \ln \frac{x}{y} + \frac{x + y}{y - x^3}.$$

$$20. z = 3x + \arcsin(2x - y).$$

$$22. z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}.$$

$$24. z = \sqrt{11 - 4x^2 + 16x - 9y^2 + 18y}.$$

$$25. z = \arcsin \frac{x-y}{2} + \frac{1}{xy}. \quad 26. z = \sqrt{9-9x^2-y^2} + \sqrt{x^2+y^2-9}.$$

$$27. z = \sqrt{y-x} - 3 \ln \frac{x^2}{y}. \quad 28. z = \ln(x^2 + 4y^2 - 2x - 8y - 1).$$

$$29. z = \frac{\sqrt{4y-x^2-y^2}}{x^2+y^2-2y}. \quad 30. z = \ln((1-x)(y-2)) + \frac{1}{x+1}.$$

12. Применяя полный дифференциал, приближенно вычислить (считать $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$; $1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,017$).

$$1. 3 - (0,98)^{1,05}. \quad 2. \sqrt{(1,02)^2 + (0,05)^2}. \quad 3. \sqrt[3]{(2,92)^2 - (1,03)^2}.$$

$$4. (1,02)^3 \cdot (0,97)^2. \quad 5. \sqrt{(1,04)^{1,99} + \ln(1,02)}. \quad 6. \sqrt{(0,98)^3 + (2,02)^3}.$$

$$7. \sin 28^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ. \quad 8. \sqrt{(1,04)^4 + (1,98)^3}. \quad 9. \sqrt{(4,05)^2 + (2,96)^2}.$$

$$10. 4 - 3 \cdot (0,89)^{2,02}. \quad 11. \ln((1,02)^3 - (0,03)^2). \quad 12. (0,96)^2 \cdot (1,02)^3.$$

$$13. \operatorname{arctg} \left(\frac{1,97}{1,02} - 1 \right). \quad 14. \sqrt{3e^{0,02} + 11 \cdot (1,97)}. \quad 15. \sqrt{\sin^2 1,55 + 8e^{0,02}}.$$

$$16. (6,03)^3 \cdot \sin 29^\circ. \quad 17. \sqrt{\cos 1,55 + (3,98)^2}. \quad 18. \sqrt[3]{(2,01)^3 + 117,1}.$$

$$19. \operatorname{arctg} \frac{1,04}{0,92}. \quad 20. \ln((0,97)^2 - (0,08)^2). \quad 21. \sqrt{11,97 + (2,02)^2}.$$

$$22. (3,03)^{2,02} - 4. \quad 23. \sqrt{(1,05)^3 + (1,97)^3}. \quad 24. \cos 61^\circ - 2 \cdot \operatorname{tg} 44^\circ.$$

$$25. \sqrt[3]{(1,09)^5 + 7,05}. \quad 26. 3 - (2,03)^2 \cdot (3,98)^3. \quad 27. \sqrt{e^{0,03} + 5 \cdot (2,97)}.$$

$$28. \cos 59^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ. \quad 29. (0,97)^{1,08} + (1,04)^{2,03}. \quad 30. \ln(0,09^3 + 0,99^3).$$

13. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке M_0 .

1. $xyz - z^3 + zy - x + 1 = 0; M_0(1; 2; 2).$

2. $z^2x - x^2y + y^2z + 2x - y - 6 = 0; M_0(5; 1; 2).$

3. $z = (x - y)^2 + xy - \frac{3x}{y}; M_0(2; 2; 1).$

4. $z = 3\left(\frac{1}{x} + y\right)^2 - \frac{2x^2}{y^2}; M_0(1; 1; 10).$

5. $5(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + xz) - 9 = 0; M_0(1; 1; 1).$

6. $(x + y - z)^2 - 3y + 2x - z - 13 = 0; M_0(1; 2; -1).$

7. $(x + 2y)^2 - (x + 4y - 2z) = 0; M_0(-1; 2; -1).$

8. $z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x - 20 = 0; M_0(-1; 2; -2).$

9. $x^2 - y^2 + z^3 - 2x + yz - 8 = 0; M_0(3; -1; 2).$

10. $z \ln(x + z) - \frac{xy}{z} = 2; M_0(-2; 3; 3).$

11. $3x^2 - y^2 + \sqrt{x + z} + 3y - 5z + 2 = 0; M_0(4; -4; 5).$

12. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2x - 3y - 30 = 0; M_0(2; 2; -2).$

13. $4 - x^2 - y^2 + z^2 - z + 3x - 5y - 16 = 0; M_0(1; -1; 3).$

14. $xz - yx + yz + 2x - 3y + 2z = 0; M_0(1; -2; -10).$

15. $xy - yz + 2x + z^2 - 3 = 0; M_0(-1; -2; -3).$

16. $z^2x - x^2y + y^2z + 2x - y - 10 = 0; M_0(1; 2; 2).$

17. $z = x^2 - xy^2 - 2x + 3y; M_0(2; -1; -5).$

18. $z^3 + 3x^2y + 2xz + yz - 2x + y + 2 = 0; M_0(1; -2; 2).$

19. $z = x^2y - xy^3 + xy - 2x - y; M_0(1; -1; -2).$
20. $xyz - 2(x^2 + y^2 + z^2) + 5 = 0; M_0(1; -1; -1).$
21. $(x + 2y - z)^2 - xz = 0; M_0(2; 1; 2).$
22. $x \ln z - z \ln y + 2y \ln x + 2x - 2z = 0; M_0(1; 1; 1).$
23. $xyz = x + 2y - 3z^2 + 21; M_0(-1; -2; 2).$
24. $z^2 \ln x - x^2 \ln z + y^2 xz - 4 = 0; M_0(1; 2; 1).$
25. $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 6xz - 6yz - 25 = 0; M_0(1; -1; 1).$
26. $(x - 1)^2 + (y + z)^2 - (1 - z)^2 + yx + yz = 0; M_0(1; -1; -1).$
27. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + (z - 1)^2 - (y + 1)^2 - 5 = 0; M_0(-1; -1; 1).$
28. $xyz + \frac{x^2}{2} - 3y + 2z - \frac{y^2}{2} - 3 = 0; M_0(1; 1; 2).$
29. $x^2y - y^2z + z^2x - 2x + 3y - 5z + 10 = 0; M_0(-1; 1; 2).$
30. $(x + 2y - z)^2 - (y + 2z)^2 + 24 = 0; M_0(1; 1; 2).$

14. Найти производную функции U в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$.

1. $U = 4 - x^2 - y^2 + z^2 - z; M_0(-1; 2; -1); \vec{l} = (8; 4; 1).$
2. $U = 2xyz - x^2 + y^2; M_0(2; 1; -1); \vec{l} = (12; 3; 4).$
3. $U = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + z; M_0(1; -1; 2); \vec{l} = (2; 3; 6).$
4. $U = xy - yz + 2x + z^2; M_0(-2; 1; 2); \vec{l} = (-4; 8; 1).$
5. $U = z^2x - x^2y + y^2z + 2x - y; M_0(1; -1; 3); \vec{l} = (-4; -3; 12).$
6. $U = xyz - z^3 + zy - x + 2; M_0(1; -1; -1); \vec{l} = (-2; 3; 6).$

7. $U = 3(x^2 + y^2 + z^2) - xy$; $M_0(1; 1; 1)$; $\vec{l} = (-3; 12; 4)$.
8. $U = 3x^2 - 2y^2 + z^2 - xyz$; $M_0(-1; 1; 1)$; $\vec{l} = (1; 2; 2)$.
9. $U = xyz^2 - \ln(2 + x^2)$; $M_0(1; 2; -2)$; $\vec{l} = (4; -1; 8)$.
10. $U = 3x^2z - xy + \sqrt{x + y}$; $M_0(4; 5; 1)$; $\vec{l} = (3; -12; 4)$.
11. $U = x^2 - y^2 + z^3 - 2x + yz - 1$; $M_0(2; -1; 1)$; $\vec{l} = (-2; -3; 6)$.
12. $U = \sqrt{4 - xy} + xz - 2yz^2$; $M_0(1; -5; 2)$; $\vec{l} = (-4; -8; 1)$.
13. $U = z \ln(x + z) - \frac{xy}{z} - 2$; $M_0(2; 3; -1)$; $\vec{l} = (3; -4; 12)$.
14. $U = (x + y - z)^2 - 3xyz$; $M_0(1; 1; -1)$; $\vec{l} = (2; -3; -6)$.
15. $U = \frac{x}{y} - (x + 2y + z)^2$; $M_0(1; -1; 1)$; $\vec{l} = (-1; 2; -2)$.
16. $U = x \ln z - z \ln y + 2y \ln x$; $M_0(1; 1; 2)$; $\vec{l} = (8; 4; -1)$.
17. $U = \arctg(xy) + \arctg(yz)$; $M_0(1; -1; -1)$; $\vec{l} = (-12; 4; 3)$.
18. $U = z^2 \ln x - x^2 \ln y + y^2 \ln z$; $M_0(1; 1; 1)$; $\vec{l} = (3; -2; -6)$.
19. $U = 3xyz - x^2 - y^2 - z^2$; $M_0(1; -1; 2)$; $\vec{l} = (8; -1; 4)$.
20. $U = xyz - 2(x^2 + y^2 + z^2)$; $M_0(1; -1; 1)$; $\vec{l} = (-12; -4; 3)$.
21. $U = (x + 2y - z)^2 - xz$; $M_0(-1; 2; 1)$; $\vec{l} = (3; -6; 2)$.
22. $U = \sqrt{(1 + x)(12 - y)} + z^2 - xz$; $M_0(3; 3; -1)$; $\vec{l} = (1; -8; 4)$.
23. $U = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{2}{z} + 5$; $M_0(1; 1; -1)$; $\vec{l} = (2; -1; 2)$.
24. $U = (1 + 2x)^3 - xy + z^2 - yz$; $M_0(-1; 2; -1)$; $\vec{l} = (4; -12; 3)$.
25. $U = x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 6xz - 6yz$; $M_0(1; 1; 1)$; $\vec{l} = (6; -2; 3)$.

$$26. U = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 - (1 - z)^2 + yz; M_0(1; -1; 1); \vec{l} = (-1; 8; -4).$$

$$27. U = -2(x + 2) - (y + 1)^2 + 4(z - 1)^2; M_0(1; 1; 1); \vec{l} = (-4; 12; -3).$$

$$28. U = (x + y - 2)^2 + (x - z + 1)^2; M_0(1; -1; -1); \vec{l} = (-2; -1; 2).$$

$$29. U = z^2 - 2x^2 + y^2 - 3(y + z); M_0(-1; 1; -1); \vec{l} = (6; -2; -3).$$

$$30. U = (x + 2y - z)^2 - 2(y + 2z); M_0(1; 1; 1); \vec{l} = (-8; -4; 1).$$

15. Задачи на градиент и производную по направлению.

I. Найти угол между градиентами функции z в точках A и B .

$$1. z = \ln \frac{y}{x}; A(0,5; 0,25); B(1; 1).$$

$$2. z = \sqrt{x^2 - y^2}; A(5; 3); B(4; 2).$$

$$3. z = x^3 + y^3 - 3xy; A(2; 1); B(0; 3).$$

$$4. z = \frac{y^2}{x}; A(3; 1); B(-2; -1).$$

$$5. z = \operatorname{arctg}(xy); A(1; 1); B(-1; -1).$$

$$6. z = \ln(x^2 + y^2); A(1; -1); B(2; 2).$$

$$7. z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}; A(0; 1); B(-1; 1).$$

$$8. z = \frac{x^3 + y^3}{x - y}; A(2; -1); B(3; 4).$$

$$9. z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}; A(2; 1); B(5; 3).$$

$$10. z = y\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{y}}; A(1; 4); B(9; 1).$$

II. Найти угол между градиентами функций z_1 и z_2 в точке M .

$$11. z_1 = \frac{2x + 3y}{x - y}; z_2 = -2xy^{-1}; M(3; 4).$$

$$12. z_1 = y^3\sqrt{x}; z_2 = \frac{y^2}{x^2}; M(1; 8).$$

$$13. z_1 = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}; z_2 = \sqrt{x + 2y}; M(1; 1).$$

$$14. z_1 = \frac{4}{x^2 + y^2}; z_2 = 4 - x^2 - y^2; M(-1; 2).$$

$$15. z_1 = \frac{xy}{x - y}; z_2 = \frac{y}{2x}; M(-1; 2).$$

$$16. z_1 = xe^{-yx}; z_2 = x^3 + 3x^2y - y^3; M(-1; 0).$$

$$17. z_1 = \arcsin \frac{y}{x}; z_2 = \frac{x}{3y - 2x}; M(2; 1).$$

$$18. z_1 = x^y; z_2 = \frac{x + y}{x^2 - y}; M(1; 2).$$

$$19. z_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; z_2 = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}; M(2; 1).$$

$$20. z_1 = \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}; z_2 = \ln \frac{x}{y}; M(0,5; 0,25).$$

III. Найти максимально возможное значение производной по направлению функции z в точке M .

$$21. z = y\sqrt{x} - y^2 - x$$

$$+ 6y; M(4; 3).$$

$$22. z = -2xy^{-1}; M(1; 4).$$

$$23. \quad z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}; \quad M(1; 1).$$

$$24. \quad z = \frac{x^3}{x-y}; \quad M(3; 2).$$

$$25. \quad z = e^{\frac{x}{y}}; \quad M(0; 2).$$

$$26. \quad z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}); \quad M(1; 4).$$

$$27. \quad z = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}; \quad M(1; 3).$$

$$28. \quad z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}); \quad M(1; 1).$$

$$29. \quad z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy}; \quad M(4; 16).$$

$$30. \quad z = 2y\sqrt[3]{x}; \quad M(1; -1).$$

16. Найти функцию $z(x; y)$ по ее полному дифференциалу.

$$1. \quad (x + y \ln x)dy + \left(\frac{y^2}{2x} + y + 1\right)dx.$$

$$2. \quad (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3 - 1)dy.$$

$$3. \quad \frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy.$$

$$4. \quad (3x^2y + y^3 - 1)dx + (x^3 + 3xy^2 - 2)dy.$$

$$5. \quad \left(2x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + 2\right)dy.$$

$$6. \quad (x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy.$$

$$7. \quad (y^3 + x^2y)dy - (x^3 - xy^2 + 1)dx.$$

$$8. \quad (2xy + e^x + y)dx + (x + x^2 + y^2)dy.$$

$$9. \quad (4x + 3y + 5)dx + (3x - 6y^2 - 3)dy.$$

$$10. \quad \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3y^2}{x^4}\right)dx + \frac{2y}{x^3}dy.$$

$$11. \quad (3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y + 2)dy.$$

12. $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x \cos y)dy.$

13. $x(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)dy.$

14. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy.$

15. $(x^2 - 3xy^2 + 1)dx + (y^3 - 3x^2y + 2)dy.$

16. $\left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy.$

17. $\left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\right)dx - \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2} + 2y\right)dy.$

18. $(3y - 6x^2 - 3)dx + (3x + 4y + 5)dy.$

19. $x(2x^2 + y^2 - 3x)dx + y(x^2 + 2y^2 - y)dy.$

20. $(y + x \ln y)dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy.$

21. $\left(x - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{\sin 2y}{x} + y\right)dy.$

22. $(e^x + y + y \cos x)dx + (e^{2y} + x + \sin x - 1)dy.$

23. $(6xy^2 + 4x^3 - 2)dx + (6x^2y + 3y^2 - 1)dy.$

24. $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2 + 3)dy.$

25. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + (2xy - e^{-y})dy.$

26. $(2x - y + e^x - 5)dx + (2y - x + y^2 + 1)dy.$

27. $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2 + 2)dy.$

28. $(2x^2 + xy^2 - 1)dx + (yx^2 + 2y^2 - e^{-y})dy.$

29. $(y^3 - \cos x + 1)dx + (3xy^2 + \sin y + 2)dy.$

30. $(2x - y + 3x^2 - 1)dx + (3y^2 - 2y - x + 2)dy$.

17. Найти экстремумы функции.

1. $z = 1 - x + 2y - 6x^2 - y^2$.

2. $z = 7 - x^2 - xy - y^2 + 3x - 6y$.

3. $z = 2 - 6x + 2y - x^2 - y^2$.

4. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 - 4x + 18y + 10$.

5. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

6. $z = 1 - x + 2y - 6x^2 - 3y^2 - 8xy$.

7. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

8. $z = xy - x^2 - y^2 - 3x + 2y - 1$.

9. $z = 15 - 4x + 6y + x^2 + y^2$.

10. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y + 5$.

11. $z = 1 - y + x + x^2 + xy + y^2$.

12. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7$.

13. $z = 3x + 6y - xy - x^2 - y^2$.

14. $z = 2xy(6 - x - y); \quad x > 0, \quad y > 0$.

15. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

16. $z = x^3y^3(3 - x - y); \quad x > 0, \quad y > 0$.

17. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

18. $z = x^3 + xy^2 + 2xy - 11x$.

19. $z = 2x^2 + 3y^2 - x - 7y$.

20. $z = x^3 + y^3 + 6xy - \frac{8}{27}; \quad x < 0, \quad y < 0$.

21. $z = 3x^2 + 2y^2 - 2xy - 10$.

22. $z = x^3 - 7x^2 + xy - y^2 + 9x + 3y + 12$.

23. $z = x^2 + y^2 - 4y + 4$.

24. $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$.

25. $z = x^2y(4 - x - y); \quad x > 0, \quad y > 0$.

26. $z = x^3 + y^3 - 15xy + 1; \quad x > 0, \quad y > 0$.

27. $z = xy^2(1 - x - y); \quad x > 0, \quad y > 0$.

28. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 16; \quad x > 0, \quad y > 0$.

29. $z = x^2 - 2xy + y^3 - y^5$.

30. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x + 6y - 7$.

18*. Найти оптимум.

1. В данный прямой круговой конус вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

2. Найти кратчайшее расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$.

3. Даны три точки $A(4; 0; 4)$, $B(4; 4; 4)$ и $C(4; 4; 0)$. Найти на поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ такую точку S , чтобы объем пирамиды $SABC$ был наибольшим.

4. При каких размерах прямоугольного открытого ящика с заданным объемом $V = 32 \text{ м}^3$ его поверхность будет наименьшей?

5. В шар радиуса r вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

6. Шатер имеет форму цилиндра, завершенного сверху прямым круговым конусом. При данной полной поверхности шатра определить его измерения так, чтобы объем был наибольшим.

7. Определить размеры конуса наименьшей боковой поверхности при условии, что его объем равен V .

8. Определить наружные размеры котла цилиндрической формы с заданной толщиной стенок d и емкостью V так, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала.

9. Нужно построить конический шатер наибольшего объема из данного количества материала S . Каковы должны быть его размеры?

10. На плоскости $3x - 2z = 0$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от точек $A(1; 1; 1)$ и $B(2; 3; 4)$ наименьшая.

11. Даны три точки $A(4; 0; 4)$, $B(4; 4; 4)$ и $C(4; 4; 0)$. Найти на поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ такую точку S , чтобы объем пирамиды $SABC$ был наименьшим.

12. Шатер имеет форму цилиндра, завершенного сверху прямым круговым конусом. При данном объеме шатра определить его измерения так, чтобы его полная поверхность была наименьшей.

13. Из всех эллипсов, у которых сумма осей постоянна и равна 24, найти наибольший по площади.

14. Найти треугольник данного периметра $2p$, который при вращении вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

15. Положительное число a разбить на три неотрицательных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

16. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую поверхность?

17. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, площадь поверхности которой равна $3\pi \text{ м}^2$, имеет наибольшую вместимость?

18. Найти прямоугольный параллелепипед с данной площадью поверхности S , имеющий наибольший объем.

19. На плоскости Oxy найти точку $M(x; y)$, сумма квадратов расстояний которой от трех прямых $x = 0$, $y = 0$, $x - y + 1 = 0$ была бы наименьшей.

20. Через точку $M(a; b; c)$ провести плоскость, образующую с координатными плоскостями тетраэдр наименьшего объема.

21. В эллипсоид вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

22. В какой точке эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ касательная к нему образует с осями координат треугольник наименьшей площади?

23. В данный шар вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

24. Найти кратчайшее расстояние от точки $M(1; 2; 3)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$.

25. Найти длины полуосей эллипса $36x^2 + 24xy + 29y^2 = 180$.

26. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1; 0)$ до эллипса, заданного уравнением $4x^2 + 9y^2 = 36$.

27. Среди всех треугольников данного периметра $2p$ найти треугольник наибольшей площади.

28. Среди всех треугольников, вписанных в круг радиуса R , найти треугольник наибольшей площади.

29. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине найти наибольший по площади.

30. На эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку, наиболее удаленную от точки $(0; 0; 3)$.

19. В двойном интеграле $\iint_D f(x; y) dx dy$ изобразить область D на чертеже, перейти к повторному, расставив пределы интегрирования в различных порядках, если область интегрирования ограничена линиями:

1. $y = \frac{x^2}{4}, y = 2\sqrt{x}, x \leq 2.$
2. $y = -\sqrt{1-x^2}, y = 1-x, x = 0.$
3. $y = x^2, y = x+2, x \geq 0.$
4. $y = 0,5x+1, y = 7-x, x = 0.$
5. $y = -x^2, y = x^2, x = 1.$
6. $y = 0, x = 0,5y+1, x = 7-y.$
7. $y = \ln x, x = 3, y = 0.$
8. $y = 0, y = 2, x = y^2, x = y^2 + 2.$
9. $y = \frac{4}{x}, x = 1, x = 2, y = 0.$
10. $x \geq 0, x \leq 1,5y, x = \sqrt{25-y^2}.$
11. $x = \cos y, x = 0, y = 0.$
12. $y = 0, y = (x-2)^2, y = x.$
13. $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4.$
14. $y \geq 0, y \leq x, x^2 + y^2 = 1.$
15. $y = \sqrt{x}, x + y = 0, y = 1.$
16. $x = 0,25y^2, x = 2\sqrt{y}, y \leq 2.$
17. $y = \sqrt{2-x^2}, y = x^2.$
18. $y = x + \frac{1}{x}, y = 1, x = 1, x = 2.$
19. $y = 2x - x^2, y = x - 2.$
20. $y = e^{1/x}, y = 0, x = 1, x = 2.$
21. $y = x, y = 2x, x + y = 6.$
22. $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}.$
23. $x^2 + y^2 = 1.$
24. $x^2 - y^2 = 1, x = 2, x = 3.$
25. $y = e^{-x^2}, x = 0, x = 1, y = 0.$
26. $y = \frac{2x}{x+1}, x = -0,5, y = 0, y = 1.$
27. $x = 0, x \leq 2y+1, x = 4-y^2.$
28. $y = 0, y = 4, x = 2 - \frac{y^2}{2}, x = 3 + \frac{y^2}{2}.$
29. $x = 0, x = 4, y = 2 - \frac{x^2}{2}, y = 3 + \frac{x^2}{2}.$

$$30. y^2 + x^2 = 4x, y^2 + x^2 = 8x, y = 2x, y = x.$$

20. Вычислить объем тела, образованного данными поверхностями.

$$1. y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x + z = 4, z = 0.$$

$$2. x = 0, y = 0, 6x + 3y + 2z = 6, z = 0.$$

$$3. x + y + z = 2, 3x + y = 2, 3x + 2y = 4, y = 0, z = 0.$$

$$4. z = 0, y + z = 2, 2y = x^2.$$

$$5. z = 4x^2 + 2y^2 + 1, x + y = 3, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$6. z = x^2 + y^2, x = y^2, x = 2, z = 0.$$

$$7. z = 4 - x^2, y = 5, y = 0, z = 0.$$

$$8. z = 1 - x^2, x + y = 1, y = 0, y = 2x, z = 0.$$

$$9. z = 1 + x + y, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$10. z = 4 - x^2 - y^2, z = 0, x = -1, x = 1, y = -1, y = 1.$$

$$11. z = 1 + x^2 + y^2, y = 0,5x, y = x, y = 1, z = 0.$$

$$12. 2 - x - y - 2z = 0, z = 0, y = x^2, y = x.$$

$$13. z = x^2 + y^2 + 1, x = 0, x = 4, y = 0, y = 4, z = 0.$$

$$14. z = \frac{y^2}{2}, 2x + 3y - 12 = 0, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$15. z = 0, x = y, x + y = 3, 2x + y = 6, x + y + z = 1.$$

$$16. z = 2 - x, z = 0, y = 2\sqrt{x}, y = 0,25x^2.$$

$$17. z = x^2, z = 0, 2x - y = 0, x + y = 9.$$

$$18. z = 0,25y^2, \quad z = 0, \quad 2x - y = 0, \quad x + y = 9.$$

$$19. z = x^2 + y^2, \quad z = 0, \quad y = x^2, \quad y = 1.$$

$$20. z = a - x, \quad z = 0, \quad y^2 = ax, \quad a > 0.$$

$$21. z = 4 - y^2, \quad z = 0, \quad y = \frac{x^2}{2}.$$

$$22. z = x^2 + y^2 + 1, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$23. z = y, \quad z = 0, \quad x = 0, \quad x = 4, \quad y = \sqrt{25 - x^2}.$$

$$24. z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$25. z = 4 - x - y, \quad y = 2 - x, \quad y = 2, \quad x = 2, \quad z = 0.$$

$$26. z + x = 1, \quad x = y^2, \quad z = 0.$$

$$27. x + y = 6, \quad z = 4y, \quad z = 0, \quad y = \sqrt{3x}.$$

$$28. z = x^2 + y^2, \quad y = -x^2, \quad y = -1, \quad z = 0.$$

$$29. z = y^2, \quad x + y = 2, \quad x = 0, \quad z = 0.$$

$$30. z = 2 - y, \quad z = 0, \quad y = x^2.$$

21*. Для плоской фигуры (пластинки), ограниченной линией L , найти координаты центра тяжести и моменты инерции относительно осей Ox, Oy и точки $O(0; 0)$. Если в условии задачи не дана плотность $\rho(x; y)$, то пластинка считается однородной ($a > 0; b > 0; \quad b < a$).

$$1. L: y^2 = 4x + 4, \quad y^2 = -2x + 4.$$

$$2. L: \text{круговой сектор радиуса } a \text{ с углом при вершине } 2\alpha.$$

$$3. L: y = 2x, \quad x = 1, \quad y = 0; \quad \rho(x; y) = x + y.$$

4. $L: y = \sin x, y = \frac{2x}{\pi}, x \geq 0.$

5. $L: x + y = 2, x = 2, y = 2.$

6. $L: r = a(1 + \cos \varphi).$

7. $L: r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$

8. $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x = 0, y = 0; \rho(x; y) = 2y + 1.$

9. $L: x + y = 2, x = 0, y = 0; \rho(x; y) = x + 2y.$

10. $L: y^2 = 4x, x = 2, y \geq 0; \rho(x; y) = 2x + y.$

11. $L: y^2 = ax, x = a, y = 0, y \geq 0.$

12. $L: r^2 = a^2 \cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$

13. $L: y = b, y = 0, x = 0, x = a.$

14. $L: \text{треугольник } ABC, \text{ где } A(1; 1), B(2; 1), C(3; 3).$

15. $L: y = 4 - x^2, y = 0.$

16. $L: y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi.$

17. $L: y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}.$

18. $L: y^2 = ax, y = x.$

19. $L: \text{треугольник } ABC, \text{ где } A(0; 2a), B(a; 0), C(a; a).$

20. $L: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \frac{x}{5} + \frac{y}{3} \geq 1.$

21. $L: y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$

22. $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y \geq 0.$

23. $L: y = -\sqrt{R^2 - x^2}, y = 0.$

24. $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0.$

25. $L: y^2 = ax, x = a, y \leq 0.$

26. $L:$ сектор кругового кольца с центральным углом α и радиусами r и R .

27. $L: y = 2 - x^2, y = 0.$

28. $L: r = a(1 - \cos \varphi).$

29. $L: y^2 = 2x, x = 2.$

30. $L: y = \sqrt{R^2 - x^2}, y = 0.$

22*. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями ($a > 0; b > 0$).

1. $(x^2 + y^2)^3 = a^2 y^4.$

2. $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^4.$

3. $(x^2 + y^2)^2 = 4ay^3.$

4. $x^4 = a^2(x^2 - y^2).$

5. $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^3.$

6. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$

7. $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2 x^3.$

8. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2.$

9. $y^3 = 2(y^2 - x^2).$

10. $y = (x - 4)^2, y = 16 - x^2.$

11. $x^2 + 4y^2 = 8.$

12. $x^2 + y^2 = -2y, y = -1, y = x.$

13. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(y^2 - x^2).$

14. $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3.$

15. $x^2 = 2ay, y^2 = 2ax.$

16. $(x^2 + y^2)^2 = 4y^3.$

$$17. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$18. \rho = 2 + \cos \varphi.$$

$$19. (x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4.$$

$$20. (x^2 + y^2)^2 - 4xy = 0.$$

$$21. y = 1 - x^2, \quad y = -2.$$

$$22. x = 4y - y^2, \quad x + y = 6.$$

$$23. y = \frac{(x-a)^2}{a}, \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad x \geq 0.$$

$$24. x^2 + y^2 = a^2, \quad x + y = a, \quad y = 0,5a, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0,5a.$$

$$25. xy = a^2, \quad x^2 = ay, \quad y = 2a, \quad x = 0.$$

$$26. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad y = x, \quad y = 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$27. x^2 + y^2 = 5, \quad x + 2y - 5 = 0, \quad y = 0.$$

$$28. y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x = 0,5, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

$$29. y = 4 - x^2, \quad 3x - 2y - 6 = 0.$$

$$30. y = -2, \quad y = x + 2, \quad y = 2, \quad y^2 = x.$$

23*. Вычислить тройной интеграл.

$$1. \iiint_V x^2 y z \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0,$
 $x + y + z = 1.$

$$2. \iiint_V (x + y + z) \, dx \, dy \, dz,$$

V – куб, ограниченный плоскостями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1,$

$$z = 0, \quad z = 1.$$

$$3. \iiint_V (1 - y)xz \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0,$
 $x + y + z = 1.$

$$4. \iiint_V x^2 y^2 z \, dx \, dy \, dz,$$

V – параллелепипед, ограниченный плоскостями $x = 1, x = 3,$
 $y = 0, y = 2, z = 2, z = 5.$

$$5. \iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{(x + y + z + 1)^3},$$

V – область, ограниченная плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0,$
 $x + y + z = 1.$

$$6. \iiint_V y^2(e^{xy} - e^{-xy}) \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная плоскостями $x = 0, y = -2, y = 4x,$
 $z = 0, z = 2.$

$$7. \iiint_V (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x +$
 $y = 1, z = x + y.$

$$8. \iiint_V 2y^2 e^{xy} \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная плоскостями $x = 0, y = 1, y = x,$
 $z = 0, z = 1.$

$$9. \iiint_V x \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная плоскостями $x = 1, y = 0, y = 10x,$

$z = 0$ и параболоидом $z = xy$.

$$10. \iiint_V x^2 z \sin(xyz) \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = \pi$, $z = 0$, $z = 1$.

$$11. \iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная плоскостью $z = 2$ и параболоидом $2z = x^2 + y^2$.

$$12. \iiint_V ((x + y)^2 - z) \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная поверхностями $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$, $z = 0$.

$$13. \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, z \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 = z$, $z = 1$.

$$14. \iiint_V z(x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 = z$, $(x^2 + y^2)^2 = z^3$.

$$15. \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

$$16. \iiint_V (x^2 + y^2 + z)^2 \, dx \, dy \, dz,$$

V – цилиндр, ограниченный поверхностью $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $z = 2$, $z = 3$.

$$17. \iiint_V dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, $x^2 + y^2 \leq z^2$.

$$18. \iiint_V (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

V – цилиндр, ограниченный поверхностью $x^2 + y^2 = 16$ и плоскостями $z = -3$, $z = 3$.

$$19. \iiint_V dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 22$ и поверхностью параболоида $9z = x^2 + y^2$.

$$20. \iiint_V z \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

$$21. \iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

V – шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

$$22. \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

$$23. \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и расположена в первом октанте.

$$24. \iiint_V xyz \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и расположена в первом октанте.

$$25. \iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}},$$

V – область, ограниченная сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$26. \iiint_V z \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 0$ ($z \geq 0$).

$$27. \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

$$28. \iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

V – область, ограниченная сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

$$29. \iiint_V xyz^2 \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и расположена в первом октанте.

$$30. \iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz,$$

V – область, ограниченная поверхностями $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.

24. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L . При вычислении интеграла по замкнутому контуру обходить контур против часовой стрелки ($a > 0$; $b > 0$; $R > 0$).

1. $\int_{AB} (xy - y^2) dx + x dy$; $L: y = 2x^2$; $A(0; 0)$, $B(1; 2)$.
2. $\int_{AB} (x - y) dx + \frac{1}{2}x^2 dy$; $L: y = 2\sqrt{x}$; $A(0; 0)$, $B(1; 2)$.
3. $\int_{AB} (x^2 - 2x) dx + (y^2 - 2xy) dy$; $L: y = x^2$; $A(-1; 1)$, $B(1; 1)$.
4. $\oint_L (x + 2y) dx + (x - y) dy$; $L: x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$.
5. $\oint_L (x^2 y - 3x) dx + (y^2 x + 2y) dy$; $L: x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$.
6. $\oint_L x dy - y dx$; $L: x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$.
7. $\int_L \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$; L : отрезок AB ; $A(1; 2)$, $B(3; 6)$.
8. $\int_L (x^2 - y^2) dx - (x - y^2) dy$; L : ломаная ACB ;
 $A(1; 2)$, $C(3; 2)$, $B(3; 5)$.
9. $\int_L (x^2 + y) dx + (x + y^2) dy$; L : ломаная ACB ;
 $A(2; 1)$, $C(5; 1)$, $B(5; 3)$.
10. $\oint_L x dy - y dx$; L : ломаная $ABCA$; $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$.

$$11. \int_{AB} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y) dy; \quad L: y = |x|; \quad A(-1; 1), \quad B(2; 2).$$

$$12. \int_{AB} \sin y dx + \sin x dy; \quad L: \text{отрезок } AB; \quad A(0; \pi), \quad B(\pi; 0).$$

$$13. \int_{AB} \frac{y}{x} dx + x dy; \quad L: y = \ln x; \quad A(1; 0), \quad B(e; 1).$$

$$14. \int_{AO} x dy - y dx; \quad L: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t); \\ A(2\pi a; 0), \quad O(0; 0).$$

$$15. \oint_L (x + y) dx + (x - y) dy; \quad L: x^2 + y^2 = 4.$$

$$16. \oint_L y^2 dx - y^2 dy; \quad L: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

$$17. \int_{OM} xy dx + (x + y) dy; \quad L: y = x^2; \quad O(0; 0), \quad M(1; 1).$$

$$18. \int_{AB} 2xy dx + x^2 dy; \quad L: \text{любая линия}; \quad A(1; 0), \quad B(0; 3).$$

$$19. \oint_L \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}; \quad L: \text{ломаная } ABCA; \quad A(1; 1), \quad B(2; 1), \quad C(2; 2).$$

$$20. \oint_L y dx + a dy; \quad L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

21. $\oint_L y dx + (x + y) dy$; L : $y = x^2$, $y = 4$.
22. $\int_{AB} \cos 2y dx - 2x \sin 2y dy$; L : любая линия; $A(1; \frac{\pi}{6})$, $B(2; \frac{\pi}{4})$.
23. $\int_L \operatorname{tg} y dx + \frac{1}{\cos^2 y} dy$; L : отрезок AB ; $A(1; \frac{\pi}{6})$, $B(2; \frac{\pi}{4})$.
24. $\oint_L (x^2 + y^2)(x dx + y dy)$; L : $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$.
25. $\oint_L \frac{y}{x} dx + 2 \ln x dy$; L : ломаная $ABCA$; $A(1; 0)$, $B(2; 0)$, $C(1; 2)$.
26. $\int_L (6xy + 4y^2 + 5y) dx + (3x^2 + 8xy + 5x) dy$; L : отрезок AB ;
 $A(2; 1)$, $B(1; 2)$.
27. $\oint_L (6xy + 5y) dx + (3x^2 + 5y) dy$; L : $y = 0$, $x = 3$, $y = \sqrt{x}$.
28. $\int_{AB} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$; AB : дуга астроида $x = R \cos^3 t$, $y = R \sin^3 t$;
 $A(R; 0)$, $B(0; R)$.
29. $\oint_L y^2 dx + (x + y)^2 dy$; L : ломаная $ABCA$; $A(a; 0)$, $B(a; a)$, $C(0; a)$.
30. $\oint_L (-x^2 y) dx + xy^2 dy$; L : $x^2 + y^2 = R^2$.

25*. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

1. $\iint_S z \, dx \, dy + y \, dx \, dz + x \, dy \, dz,$

S – верхняя сторона плоскости $x + y + z = 1$, ограниченной координатными плоскостями.

2. $\iint_S -x \, dy \, dz + z \, dx \, dz + 5 \, dx \, dy,$

S – верхняя сторона части плоскости $2x - 3y + z = 6$, лежащей в четвертом октанте.

3. $\iint_S yz \, dy \, dz + xz \, dx \, dz + xy \, dx \, dy,$

S – внешняя сторона тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4. $\iint_S xz \, dx \, dy + xy \, dy \, dz + yz \, dx \, dz,$

S – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

5. $\iint_S x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy,$

S – положительная сторона куба, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

6. $\iint_S x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dx \, dz + z^2 \, dx \, dy,$

S – внешняя сторона поверхности верхней полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

7. $\iint_S (x - y) \, dx \, dy + (z - x) \, dx \, dz + (y - z) \, dy \, dz,$

S – внешняя сторона конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$.

$$8. \iint_S yz \, dx \, dy + xz \, dy \, dz + xy \, dx \, dz,$$

S – внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 2$.

$$9. \iint_S z^3 \, dx \, dy,$$

S – внешняя поверхность плоскости $x + y + z = 10$, расположенная в первом октанте.

$$10. \iint_S z \, dy \, dz - x \, dx \, dz + y \, dx \, dy,$$

S – верхняя сторона плоскости $3x + 6y - 2z - 6 = 0$, ограниченной координатными плоскостями.

$$11. \iint_S 2x \, dy \, dz + 3y \, dx \, dz,$$

S – верхняя сторона плоскости $x + y + z = 1$, ограниченной координатными плоскостями.

$$12. \iint_S y \, dx \, dz,$$

S – верхняя сторона части плоскости $1 - x + y - z = 0$, лежащей в четвертом октанте.

$$13. \iint_S dy \, dz + dx \, dz + z \, dx \, dy,$$

S – внешняя сторона поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

$$14. \iint_S -y \, dy \, dz + x \, dx \, dz + z \, dx \, dy,$$

S – внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

$$15. \iint_S x \, dy \, dz + y \, dx \, dz,$$

S – верхняя сторона плоскости $y + z = 1$, расположенная в первом октанте между плоскостями $x = 0$ и $x = 1$.

$$16. \iint_S x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy,$$

S – внешняя сторона поверхности верхней полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

$$17. \iint_S xy \, dy \, dz + yz \, dx \, dz + xz \, dx \, dy,$$

S – внешняя сторона поверхности части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенной в первом октанте.

$$18. \iint_S dy \, dz + 2 \, dx \, dz + 3 \, dx \, dy,$$

S – внешняя сторона боковой поверхности конуса, осью которого служит ось Oz , вершина находится в точке $M(0; 0; 1)$, а основание – круг радиуса 2, лежащий в плоскости Oxy .

$$19. \iint_S (x - 1) \, dy \, dz + (y + 3) \, dx \, dz + z \, dx \, dy,$$

S – внешняя сторона конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$.

$$20. \iint_S z \, dy \, dz + (1 - z) \, dx \, dz + xy \, dx \, dy,$$

S – часть плоскости $x + y = 1$, ограниченная плоскостями $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $\vec{n}$ – нормаль, образующая острый угол с осью Ox .

$$21. \iint_S x \, dy \, dz + 9y \, dx \, dz + 18z \, dx \, dy,$$

S – верхняя сторона плоскости $x + 2y + 3z = 1$, ограниченной координатными плоскостями.

$$22. \iint_S z \, dx \, dy,$$

S – часть конуса $z^2 = x^2 + y^2$, заключенная между плоскостями $z = 0$, $z = 1$, $\vec{n}$ – нормаль, образующая тупой угол с осью Oz .

$$23. \iint_S (1 - yz) \, dy \, dz + (1 + xz) \, dx \, dz + 2(x + y) \, dx \, dy,$$

S – внешняя сторона поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

$$24. \iint_S dy \, dz + x \, dx \, dz - y \, dx \, dy,$$

S – верхняя сторона плоскости $2x + y - 2z - 2 = 0$, ограниченной координатными плоскостями.

$$25. \iint_S x \, dy \, dz - x \, dx \, dz + 3 \, dx \, dy,$$

S – верхняя сторона части плоскости $2x - y + z - 2 = 0$, лежащей в четвертом октанте.

$$26. \iint_S x^2 y^2 z \, dx \, dy,$$

S – верхняя сторона нижней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$27. \iint_S yz \, dx \, dy,$$

S – верхняя сторона части плоскости $2x + 3y + 4z = 12$, лежащей в первом октанте.

$$28. \iint_S z^4 \, dx \, dy,$$

S – внутренняя сторона поверхности полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

$$29. \iint_S y \, dy \, dz - dx \, dz + z \, dx \, dy,$$

S – верхняя сторона части плоскости $x - y + 2z - 2 = 0$, лежащей в четвертом октанте.

$$30. \iint_S x \, dy \, dz - y \, dx \, dz + 6z \, dx \, dy,$$

S – верхняя сторона части плоскости $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$, лежащей в первом октанте.

26*. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{F}$.

$$1. \vec{F} = xy^2\vec{i} - yz\vec{j} + z^2\vec{k}.$$

$$2. \vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

$$3. \vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}.$$

$$4. \vec{F} = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}.$$

$$5. \vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}.$$

$$6. \vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}.$$

$$7. \vec{F} = z^2\vec{i} + x^2\vec{j} + y^2\vec{k}.$$

$$8. \vec{F} = yz^2\vec{j} + x\vec{k}.$$

$$9. \vec{F} = x\vec{i} + y^2\vec{j} + z^3\vec{k}.$$

$$10. \vec{F} = x\vec{i} + yz^2\vec{k}.$$

$$11. \vec{F} = \frac{y}{x^2}\vec{j} - \frac{1}{x}\vec{k}.$$

$$12. \vec{F} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}.$$

$$13. \vec{F} = \frac{y}{x^2}\vec{i} - \frac{1}{x}\vec{j}.$$

$$14. \vec{F} = -\frac{1}{x}\vec{i} + \frac{y}{x^2}\vec{k}.$$

$$15. \vec{F} = yz^2\vec{i} + x\vec{j}.$$

$$16. \vec{F} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}.$$

$$17. \vec{F} = \frac{zy}{x}\vec{i} + \frac{xz}{y}\vec{j} + \frac{xy}{z}\vec{k}.$$

$$18. \vec{F} = \frac{y}{z}\vec{i} + \frac{z}{x}\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}.$$

$$19. \vec{F} = (x - z^2)\vec{i} + yz\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}.$$

$$20. \vec{F} = (x + yz)\vec{i} + (y + xz)\vec{j} + (z + xy)\vec{k}.$$

$$21. \vec{F} = y^2z^3\vec{i} + 2xyz^2\vec{j} + 3xy^2z^2\vec{k}.$$

$$22. \vec{F} = yz\vec{i} + z(x + 2y)\vec{j} + y(x + y)\vec{k}.$$

$$23. \vec{F} = (x^3 + y^2 + z)\vec{i} + (y^3 + z^2 + x)\vec{j} + (z^3 + x^2 + y)\vec{k}.$$

$$24. \vec{F} = (x - y)(y - z)\vec{i} + (y - z)(z - x)\vec{j} + (z - x)(x - y)\vec{k}.$$

$$25. \vec{F} = (y^2 + z^2)(x + y)\vec{i} + (z^2 + x^2)(y + z)\vec{j} + (x^2 + y^2)(z + x)\vec{k}.$$

$$26. \vec{F} = (x^2 + y^2)(y - z)\vec{i} + (y^2 + z^2)(z - x)\vec{j} + (z^2 + x^2)(x - y)\vec{k}.$$

$$27. \vec{F} = x(y^2 - z^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(x^2 - y^2)\vec{k}.$$

$$28. \vec{F} = \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\vec{i} + \frac{1}{2}(z^2 + x^2)\vec{j} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\vec{k}.$$

$$29. \vec{F} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k}.$$

$$30. \vec{F} = x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\vec{i} + y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\vec{j} + z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\vec{k}.$$

27*. Вычислить ротор векторного поля $\vec{F}$.

$$1. \vec{F} = xy^2\vec{i} - yz\vec{j} + z^2\vec{k}.$$

$$2. \vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

$$3. \vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}.$$

$$4. \vec{F} = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}.$$

$$5. \vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}.$$

$$6. \vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}.$$

$$7. \vec{F} = z^2\vec{i} + x^2\vec{j} + y^2\vec{k}.$$

$$8. \vec{F} = yz^2\vec{j} + x\vec{k}.$$

$$9. \vec{F} = x\vec{i} + y^2\vec{j} + z^3\vec{k}.$$

$$10. \vec{F} = x\vec{i} + yz^2\vec{k}.$$

$$11. \vec{F} = \frac{y}{x^2}\vec{j} - \frac{1}{x}\vec{k}.$$

$$12. \vec{F} = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{z}{y}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}.$$

$$13. \vec{F} = \frac{y}{x^2}\vec{i} - \frac{1}{x}\vec{j}.$$

$$14. \vec{F} = -\frac{1}{x}\vec{i} + \frac{y}{x^2}\vec{k}.$$

$$15. \vec{F} = yz^2\vec{i} + x\vec{j}.$$

$$16. \vec{F} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}.$$

$$17. \vec{F} = \frac{zy}{x}\vec{i} + \frac{xz}{y}\vec{j} + \frac{xy}{z}\vec{k}. \quad 18. \vec{F} = \frac{y}{z}\vec{i} + \frac{z}{x}\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}.$$

$$19. \vec{F} = (x - z^2)\vec{i} + yz\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}.$$

$$20. \vec{F} = (x + yz)\vec{i} + (y + xz)\vec{j} + (z + xy)\vec{k}.$$

$$21. \vec{F} = y^2z^3\vec{i} + 2xyz^2\vec{j} + 3xy^2z^2\vec{k}.$$

$$22. \vec{F} = yz\vec{i} + z(x + 2y)\vec{j} + y(x + y)\vec{k}.$$

$$23. \vec{F} = (x^3 + y^2 + z)\vec{i} + (y^3 + z^2 + x)\vec{j} + (z^3 + x^2 + y)\vec{k}.$$

$$24. \vec{F} = (x - y)(y - z)\vec{i} + (y - z)(z - x)\vec{j} + (z - x)(x - y)\vec{k}.$$

$$25. \vec{F} = (y^2 + z^2)(x + y)\vec{i} + (z^2 + x^2)(y + z)\vec{j} + (x^2 + y^2)(z + x)\vec{k}.$$

$$26. \vec{F} = (x^2 + y^2)(y - z)\vec{i} + (y^2 + z^2)(z - x)\vec{j} + (z^2 + x^2)(x - y)\vec{k}.$$

$$27. \vec{F} = x(y^2 - z^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(x^2 - y^2)\vec{k}.$$

$$28. \vec{F} = \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\vec{i} + \frac{1}{2}(z^2 + x^2)\vec{j} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\vec{k}.$$

$$29. \vec{F} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k}.$$

$$30. \vec{F} = x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\vec{i} + y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\vec{j} + z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\vec{k}.$$